

3. GEOMETRÍA DE MASAS

1. Introducción
 2. Centro de masas, centro de gravedad y centroide
 3. Momento de inercia
 4. Radio de giro
 5. Teoremas de Steiner para momentos de inercia
 6. Productos de inercia
 7. Momentos principales de inercia
-

1. Introducción

En muchos problemas relacionados con la estática y la dinámica del sólido rígido aparecen unas magnitudes denominadas **centros de gravedad** y **momentos de inercia** que están relacionadas con la forma en la que está la masa distribuida geoméricamente en el espacio. Por esta razón, estas magnitudes se engloban en lo que se denomina **geometría de masas**.

Si consideramos el movimiento plano de un sólido rígido, éste tiene un tamaño y una forma definidos, por lo que un sistema de fuerzas no concurrentes puede hacer que el cuerpo se traslade y rote.

La **traslación** está regida por la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. Los aspectos de **rotación** provocados por un momento \vec{M} están regidos por una ecuación de la forma $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, en la que $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular, mientras que I es el **momento de inercia** de masa. Por comparación, el momento de inercia mide la resistencia del cuerpo a la **aceleración angular** ($\vec{M} = I\vec{\alpha}$) del mismo modo que la masa mide la resistencia de un cuerpo a la **aceleración** ($\vec{F} = m\vec{a}$).

En este tema se verán los métodos utilizados para determinar la posición del centro de gravedad así como el momento de inercia de un cuerpo.

2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masa

El centro de masa es el punto de un sistema de partículas o de un cuerpo físico en donde podría concentrarse toda la masa de manera que el momento de la masa concentrada respecto a un eje o plano cualquiera fuese igual al momento respecto a dicho eje o plano de la masa distribuida.

Consideremos un sistema de partículas como el de la Figura 1. Si $G(x_G, y_G, z_G)$ son las coordenadas del centro de masa, los **momentos estáticos** del sistema (conocidos como momentos de primer orden), M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} , se obtienen a partir de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} M_{yz} &= M x_G = \int_M x dm \\ M_{xz} &= M y_G = \int_M y dm \\ M_{xy} &= M z_G = \int_M z dm \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde M es la masa total del sistema:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (2)$$

de modo que las coordenadas del centro de masa G vienen dadas por las ecuaciones::

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M} \quad (3)$$

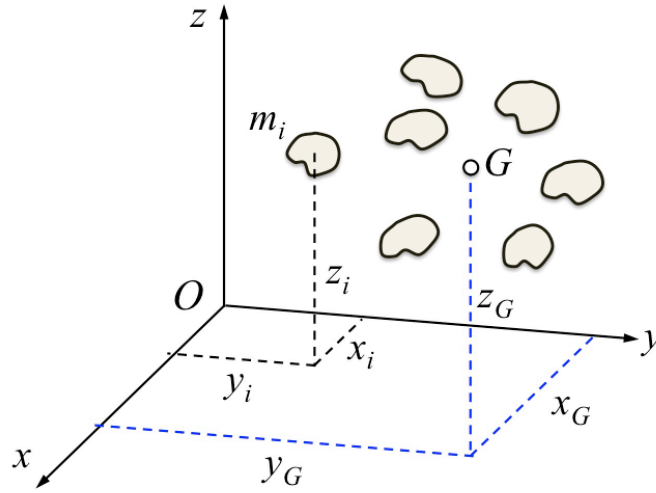


Figura 1

En forma vectorial (Figura 2), el centro de gravedad G viene determinado por el vector:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (4)$$

donde:

$$\vec{M}_O = M\vec{r}_G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \\ \vec{r}_G &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

\vec{r}_G es el vector de posición del centro de masas respecto al origen O del sistema de coordenadas.

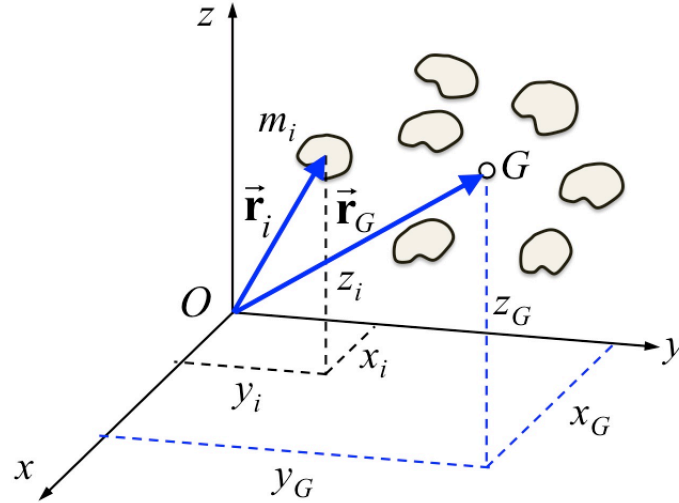


Figura 2

Para un cuerpo continuo (Figura 3) las masas se sustituyen por integrales extendidas a toda la masa del cuerpo.

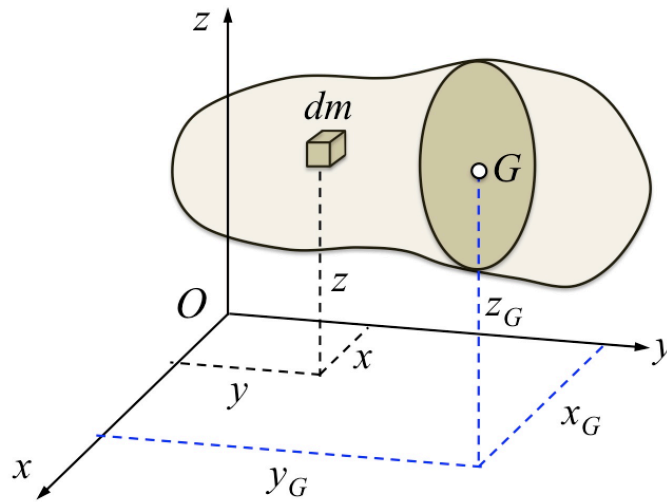


Figura 3

En este caso, los **momentos estáticos** del sistema (momentos de primer orden), M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} , se obtienen a partir de las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} M_{yz} &= M x_G = \int_M x dm \\ M_{xz} &= M y_G = \int_M y dm \\ M_{xy} &= M z_G = \int_M z dm \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

donde M es la masa total del sistema:

$$M = \int_M dm \quad (9)$$

de modo que las coordenadas del centro de masa G vienen dadas por las ecuaciones::

$$x_G = \frac{\int_M x dm}{M} \quad y_G = \frac{\int_M y dm}{M} \quad z_G = \frac{\int_M z dm}{M} \quad (10)$$

En forma vectorial (Figura 4), el centro de gravedad G viene determinado por el vector:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm \quad (11)$$

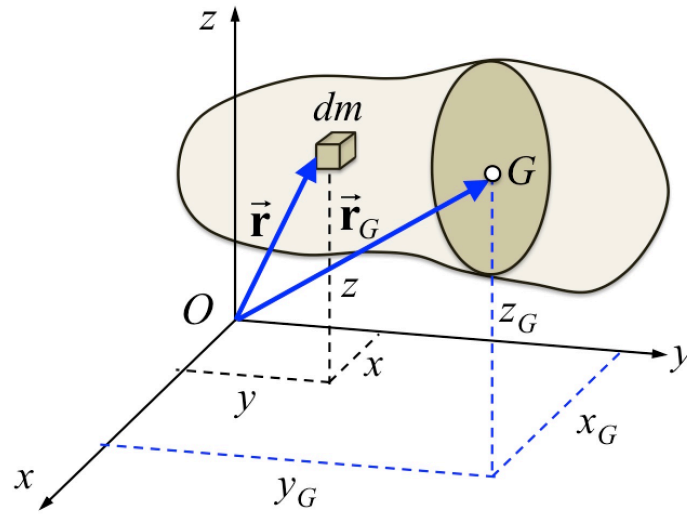


Figura 4

Donde:

$$\vec{M}_O = M \vec{r}_G = \int_M \vec{r} dm \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \\ \vec{r}_G &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

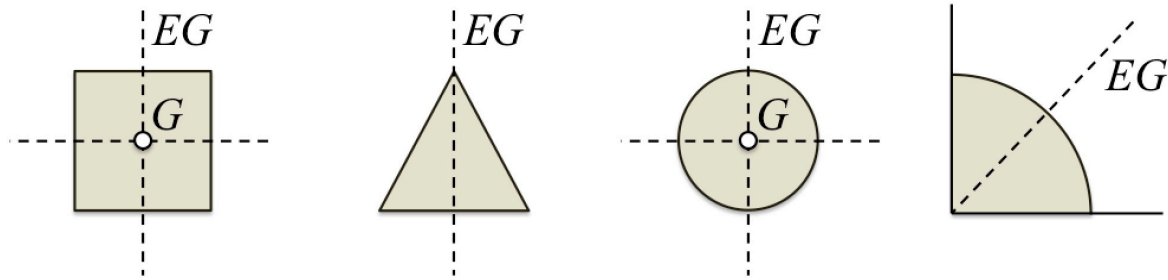
\vec{r}_G es el vector de posición del centro de masas respecto al origen O del sistema de coordenadas.

Los sumatorios o las integrales (conocidas como momentos de primer orden):

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad M_{xy} = \sum_{i=1}^N m_i z_i \quad (14)$$

$$M_{yz} = \int_M x dm \quad M_{xz} = \int_M y dm \quad M_{xy} = \int_M z dm \quad (15)$$

son los **momentos estáticos** del sistema respecto a los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, respectivamente. **El momento estático respecto a un plano es nulo si la distribución de masa es simétrica respecto a dicho plano.** Por tanto, si la distribución de masa presenta simetría respecto a un plano, el centro de masa está contenido en él. Si presenta simetría respecto a varios planos que se cortan en una recta, el centro de masa está situado en ella. Si presenta simetría respecto de varios planos que se cortan en un punto, éste es el centro de masa del cuerpo.



EG: Eje que contiene al centro de masa G

Figura 5

Cuerpos compuestos

Cualquier cuerpo de masa M puede considerarse como la unión de N cuerpos de masas $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N$, de tal forma que el momento estático respecto al plano $x = 0$ puede escribirse como la suma de N términos:

$$M_{yz} = \int_M x dm = \int_{M_1} x dm + \int_{M_2} x dm + \int_{M_3} x dm + \dots = \sum_{i=1}^N \int_{M_i} x dm \quad (16)$$

donde

$$\int_{M_i} x dm = M_i x_{Gi} \quad \int_M x dm = M x_G \quad (17)$$

Por lo que la coordenada x_G se puede escribir como:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_i x_{Gi}}{\sum_{i=1}^N M_i} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i x_{Gi}}{M} \quad (18)$$

donde M es la masa total del sistema:

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad (19)$$

Las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo compuesto se calcularán mediante las ecuaciones:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_i x_{Gi}}{M} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_i y_{Gi}}{M} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_i z_{Gi}}{M} \quad (20)$$

Cuerpo con huecos

Un cuerpo con huecos puede considerarse como la unión de N cuerpos de masa total M_t y N' huecos con masa total negativa ($-M_h$):

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N M_{ti} x_{Gti} + \sum_{j=1}^{N'} (-M_{hj}) x_{Ghj}}{M} \quad (21)$$

donde:

$$M = M_t - M_h = \sum_{i=1}^N M_{ti} - \sum_{j=1}^{N'} M_{hj} \quad (22)$$

y ecuaciones análogas para las coordenadas y_G y z_G .

Densidad de masa

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente.

Línea

Densidad lineal de masa λ

$$\lambda = \frac{dm}{dL} \rightarrow dm = \lambda dL \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_G = \frac{1}{M} \int_L \lambda \bar{\mathbf{r}} dL \quad (24)$$

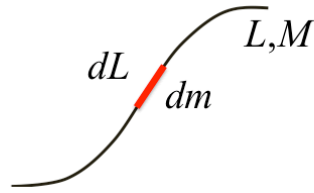


Figura 6

Superficie

Densidad superficial de masa σ

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \rightarrow dm = \sigma dS \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_G = \frac{1}{M} \int_S \sigma \bar{\mathbf{r}} dS \quad (26)$$

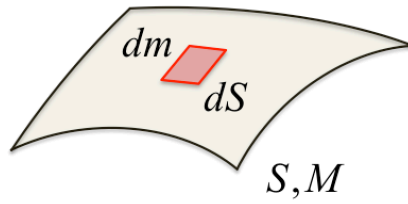


Figura 7

Volumen

Densidad volumétrica de masa ρ

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho dV \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_G = \frac{1}{M} \int_V \rho \bar{\mathbf{r}} dV \quad (28)$$

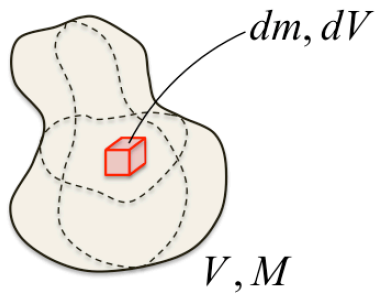


Figura 8

Centro de gravedad

El peso P de un cuerpo es la resultante de las fuerzas másicas distribuidas que la Tierra ejerce sobre los puntos materiales que constituyen el cuerpo. El punto en el que actúa el peso P es el **centro de gravedad** del cuerpo. El peso de un cuerpo es:

$$P = Mg \quad (29)$$

donde según la ley de la gravitación universal, el valor de g no es constante, sino que depende de la distancia del cuerpo al centro de la Tierra, siendo las líneas del campo gravitatorio terrestre rectas que concurren en el centro de la Tierra. Sin embargo, en la práctica **el tamaño de los cuerpos analizados es despreciable frente al radio de la Tierra** y puede suponerse que todos los puntos del cuerpo se hallan a igual distancia del centro de la Tierra (experimentan la misma atracción gravitatoria g). En este caso, las rectas soporte de las fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre los distintos puntos del cuerpo pueden suponerse paralelas (**campo gravitatorio uniforme**). Bajo estas dos hipótesis g es constante ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$) y **el centro de masa coincide con el centro de gravedad** de modo que se pueden usar de forma indistinta estas dos denominaciones. Las coordenadas del centro de gravedad serían:

$$x_{CG} = \frac{1}{P} \int_P x dp \quad \underset{\substack{\uparrow \\ dp=g dm \\ P=Mg}}{=} \quad \frac{1}{Mg} \int_M g x dm \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Si } g \text{ es cte.}}}{=} \quad \frac{g}{Mg} \int_M x dm = \frac{1}{M} \int_M x dm \quad (30)$$

de donde:

$$x_{CG} = x_G \quad (31)$$

Si no puede suponerse constante el valor de la aceleración de la gravedad g , entonces el centro de masa y el centro de gravedad no coinciden y habría que calcular las coordenadas de este último mediante las ecuaciones:

$$x_{CG} = \frac{\int x dp}{P} \quad y_{CG} = \frac{\int y dp}{P} \quad z_{CG} = \frac{\int z dp}{P} \quad (32)$$

donde:

$$dp = g dm \quad (33)$$

$$P = \int_P dp \quad \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ no se puede sacar} \\ \text{fuera de la integral} \\ \text{al no ser constante}}}{=} \quad \int_M g dm \quad (34)$$

Centroides de volúmenes, superficies y líneas

El término **centroide** se utiliza en relación con figuras geométricas (volúmenes, superficies y líneas); mientras que los términos **centro de masa** y **centro de gravedad** se utilizan con cuerpos físicos. Sin embargo, si el cuerpo es homogéneo (su densidad de masa es constante)

la posición del centroide C coincide con la posición del centro de masa G ; si además puede considerarse g constante, también coincide con la posición del centro de gravedad CG . En este caso se pueden utilizar indistintamente **centro de masa**, **centro de gravedad** y **centroide**, pues los tres coinciden.

Centroide de un volumen

Las coordenadas del centroide C de un volumen V se calculan mediante las ecuaciones:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_V x dV \quad y_C = \frac{1}{V} \int_V y dV \quad z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV \quad (35)$$

Si la densidad ρ del cuerpo es constante (cuerpo homogéneo) el centro de masa G tiene por coordenada x_G :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_M x dm \quad \begin{matrix} \uparrow \\ dm = \rho dV \\ M = \rho V \end{matrix} = \frac{1}{\rho V} \int_V \rho x dV \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rho = \text{cte.} \end{matrix} = \frac{\rho}{\rho V} \int_V x dV = \frac{1}{V} \int_V x dV = x_C \quad (36)$$

de modo que si $\rho = \text{cte.}$:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= x_C \\ y_G &= y_C \\ z_G &= z_C \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Centroide de una superficie

Las coordenadas del centroide C de una superficie S se calculan mediante las ecuaciones:

$$x_C = \frac{1}{S} \int_S x dS \quad y_C = \frac{1}{S} \int_S y dS \quad z_C = \frac{1}{S} \int_S z dS \quad (38)$$

Si la densidad σ del cuerpo es constante (cuerpo homogéneo) el centro de masa G tiene por coordenada x_G :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_M x dm \quad \begin{matrix} \uparrow \\ dm = \sigma dS \\ M = \sigma S \end{matrix} = \frac{1}{\sigma S} \int_S \sigma x dS \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \sigma = \text{cte.} \end{matrix} = \frac{\sigma}{\sigma S} \int_S x dS = \frac{1}{S} \int_S x dS = x_C \quad (39)$$

de modo que si $\sigma = \text{cte.}$:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= x_C \\ y_G &= y_C \\ z_G &= z_C \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Centroide de una línea

Las coordenadas del centroide C de una línea L se calculan mediante las ecuaciones:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dL \quad y_C = \frac{1}{L} \int_L y dL \quad z_C = \frac{1}{L} \int_L z dL \quad (41)$$

Si la densidad λ del cuerpo es constante (cuerpo homogéneo) el centro de masa G tiene por coordenada x_G :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_M x dm \quad \underset{\substack{\uparrow \\ dm = \lambda dL \\ M = \lambda L}}{=} \quad \frac{1}{\lambda L} \int_L \lambda x dL \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda = \text{cte.}}}{=} \quad \frac{\lambda}{\lambda L} \int_L x dL = \frac{1}{L} \int_L x dL = x_C \quad (42)$$

de modo que si $\lambda = \text{cte.}$:

$$\left. \begin{aligned} x_G &= x_C \\ y_G &= y_C \\ z_G &= z_C \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

En resumen, en el caso en el que la aceleración de la gravedad pueda considerarse constante (en módulo, dirección y sentido) para todos los puntos del sólido y éste sea homogéneo, el centro de masa, el centro de gravedad y el centroide coinciden, pudiéndose usar estos tres términos indistintamente.

3. Momento de inercia

En el estudio de la dinámica del sólido rígido aparecen a menudo expresiones en las que interviene el **producto de la masa de un pequeño elemento del cuerpo por el cuadrado de su distancia a una recta de interés**. Este producto recibe el nombre de momento de segundo orden de la masa del elemento o, más concretamente, **momento de inercia** del elemento. El momento de inercia dI de un elemento de masa dm respecto a un eje OO se calcula mediante la expresión:

$$dI = r^2 dm \quad (44)$$

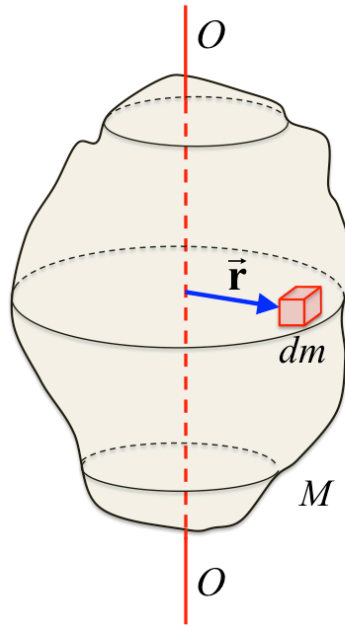


Figura 9

El momento de inercia de todo el cuerpo respecto al eje OO es, por definición:

$$I = \int_M r^2 dm \quad (45)$$

Como tanto la masa del elemento como el cuadrado de la distancia al eje son siempre positivos, el momento de inercia de una masa es siempre positivo.

El momento de inercia proporciona una **medida de la inercia de un sistema**, esto es, una medida de la resistencia del sistema cuando se trata de ponerlo en un movimiento de rotación.

En el sistema internacional de unidades el momento de inercia de masas se expresa en kg.m^2 .

Momento de inercia respecto a los ejes coordenados

Para el eje x se tiene:

$$dI_x \equiv dI_{xx} = r_x^2 dm \quad (46)$$

$$dI_x = (y^2 + z^2) dm \quad (47)$$

donde $r_x^2 = y^2 + z^2$.

Para los ejes “ y ” y “ z ” pueden escribirse expresiones análogas.

Momento de inercia respecto al eje x ($I_x \equiv I_{xx}$):

$$I_x = \int_M (y^2 + z^2) dm \quad (48)$$

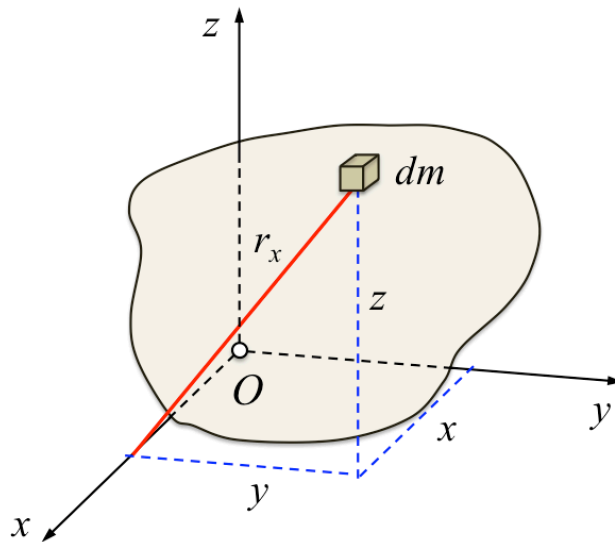


Figura 10

Momento de inercia respecto al eje y ($I_y \equiv I_{yy}$):

$$I_y = \int_M (x^2 + z^2) dm \quad (49)$$

Momento de inercia respecto al eje z ($I_z \equiv I_{zz}$):

$$I_z = \int_M (x^2 + y^2) dm \quad (50)$$

[Se utilizarán I_x e I_{xx} indistintamente (y lo mismo para $I_y \equiv I_{yy}$ e $I_z \equiv I_{zz}$)].

Momento de inercia respecto a un punto

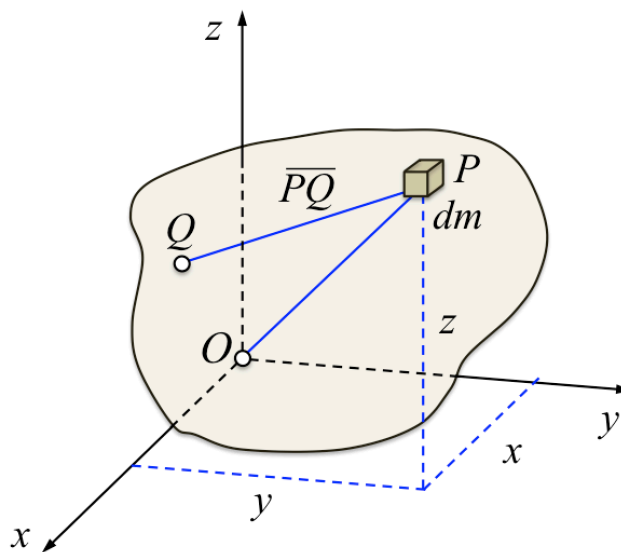


Figura 11

Momento de inercia respecto a un punto Q :

$$I_Q = \int_M QP^2 dm = \int_M [(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2] dm \quad (51)$$

Momento de inercia polar (respecto al origen de coordenadas O):

$$I_O = \int_M OP^2 dm = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (52)$$

Se cumple la relación:

$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \quad (53)$$

El **momento de inercia polar** I_O es un invariante, es decir, tiene el mismo valor si se considera otro sistema de ejes coordenados con el mismo origen O (Figura 12), es decir, I_O es el mismo para los sistemas xyz y $x'y'z'$ siempre que ambos tengan el mismo origen.

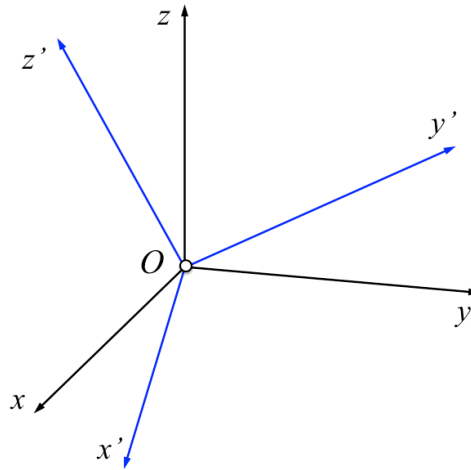


Figura 12

Momento de inercia de cuerpos compuestos

En la práctica de ingeniería es frecuente que el cuerpo en cuestión pueda descomponerse en varias formas sencillas, tales como cilindros, esferas, placas y varillas, cuyos momentos de inercia han sido calculados y tabulados. El momento de inercia del cuerpo compuesto, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto de dicho eje de las distintas partes del cuerpo. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_M (y^2 + z^2) dm = \\ &= \int_{M_1} (y^2 + z^2) dm_1 + \int_{M_2} (y^2 + z^2) dm_2 + \dots + \int_{M_N} (y^2 + z^2) dm_N = \\ &= I_{x1} + I_{x2} + \dots + I_{xN} \end{aligned} \quad (54)$$

Cuando una de las partes componentes es un **hueco**, su momento de inercia deberá restarse del momento de inercia de la parte total para obtener el momento de inercia del cuerpo compuesto.

4. Radio de giro

El radio de giro de un cuerpo de masa M respecto a un eje E es la distancia k a este eje a la que sería necesario colocar una masa puntual M , para obtener el mismo momento de inercia respecto al eje que tiene el sistema (Figura 13):

$$\left. \begin{array}{l} I = \int_M r^2 dm \\ I = M k^2 \end{array} \right\} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad (55)$$

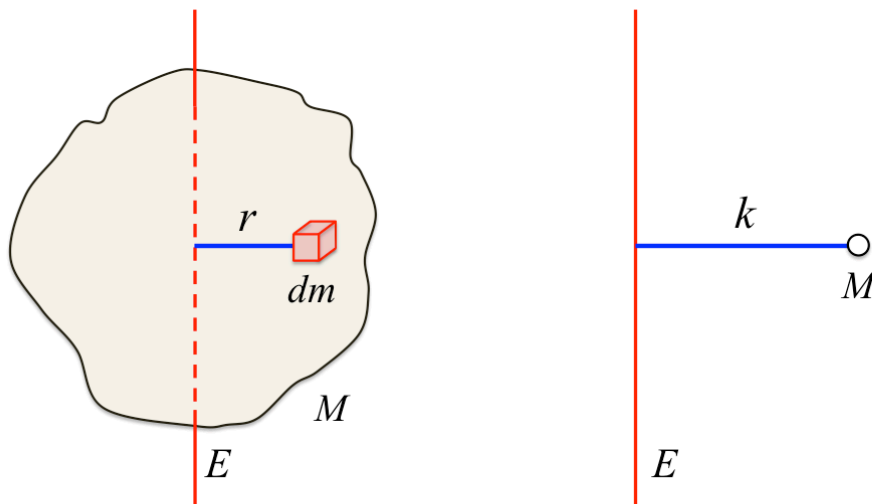


Figura 13

Para el radio de giro no existe ninguna interpretación física útil; no es más que una manera conveniente de expresar el momento de inercia de un cuerpo en función de su masa y una longitud.

5. Teoremas de Steiner para momentos de inercia

Estos teoremas relacionan los momentos de inercia de un cuerpo respecto a puntos o ejes que pasan por el centro de gravedad (que coincide con el centro de masa en las situaciones que se considerarán al ser g constante).

Teorema de Steiner respecto de puntos

Podemos determinar el momento de inercia respecto a un punto Q si conocemos el momento de inercia respecto al centro de gravedad G mediante la ecuación:

$$I_Q = I_G + M d_{QG}^2 \quad (56)$$

$d_{QG} = QG$ = distancia del punto Q al centro de gravedad G

I_Q = momento de inercia respecto al punto Q

I_G = momento de inercia respecto al centro de gravedad G

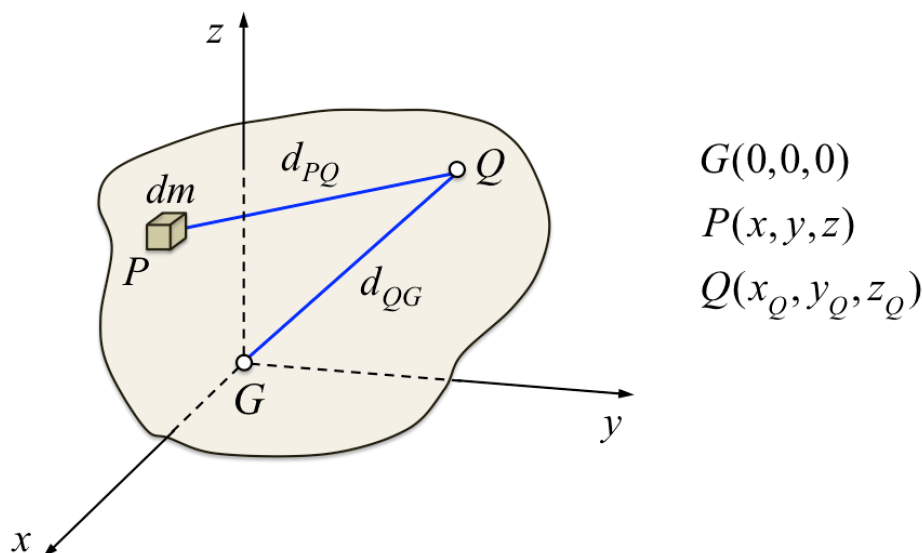


Figura 14

La demostración es sencilla. Se cumple:

$$d_{QG}^2 = QG^2 = x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} I_Q &= \int_M d_{PQ}^2 dm = \int_M [(x_Q - x)^2 + (y_Q - y)^2 + (z_Q - z)^2] dm = \\ &= \int_M (x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2) dm + \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm - \\ &\quad - 2x_Q \int_M x dm - 2y_Q \int_M y dm - 2z_Q \int_M z dm \end{aligned} \quad (58)$$

Como $\int_M x dm = \int_M y dm = \int_M z dm = 0$ por ser el centro de gravedad el punto $G(0,0,0)$ y como también se tiene $d_{QG}^2 = QG^2 = x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2$, queda $I_Q = I_G + M d_{QG}^2$.

Teorema de Steiner respecto de ejes (teorema de los ejes paralelos)

Consideremos el cuerpo representado en la Figura 15, con un sistema de coordenadas cartesianas xyz con origen en el centro de gravedad G del cuerpo y otro sistema de ejes paralelos a los anteriores $x'y'z'$ con origen el punto O . Se cumple:

$$\begin{aligned}
x' &= x + x_G \\
y' &= y + y_G \\
z' &= z + z_G
\end{aligned}
\tag{59}$$

donde hemos llamado (x_G, y_G, z_G) a las coordenadas del centro de gravedad G medidas en el sistema $x'y'z'$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
I_{x'} &= I_{xG} + M d_x^2 \\
I_{y'} &= I_{yG} + M d_y^2 \\
I_{z'} &= I_{zG} + M d_z^2
\end{aligned}
\tag{60}$$

donde:

$$\begin{aligned}
d_x^2 &= y_G^2 + z_G^2 \\
d_y^2 &= x_G^2 + z_G^2 \\
d_z^2 &= x_G^2 + y_G^2
\end{aligned}
\tag{61}$$

d_x es la distancia entre los ejes x' y x , y definiciones análogas para las distancias d_y y d_z .

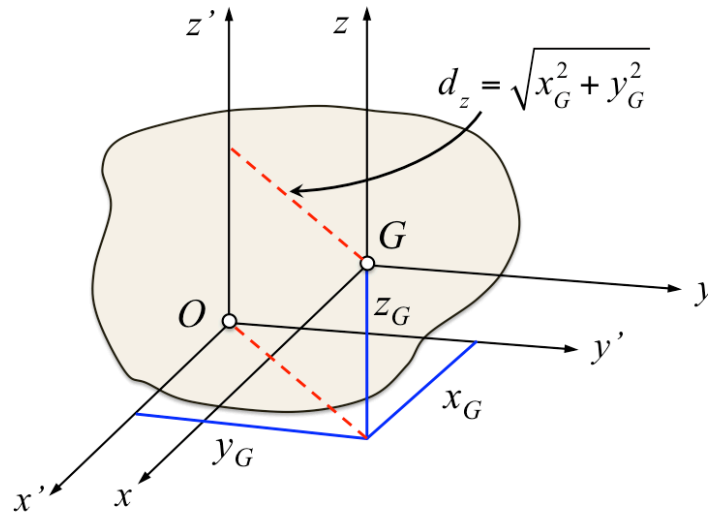


Figura 15

La ecuación (60) constituye el **teorema de Steiner** para momentos de inercia. El subíndice G indica que el eje x para por el centro de gravedad G del cuerpo. Así pues, si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad G , se podrá hallar el momento de inercia del cuerpo respecto a otro eje paralelo a aquél sin necesidad de integrar; bastará aplicar las ecuaciones en (60).

Las ecuaciones del teorema de Steiner se los ejes paralelos sólo son válidas para pasar del eje xyz que tiene como origen el centro de gravedad G del cuerpo a otros ejes paralelos o al revés. **No son válidas para dos ejes cualesquiera.**

El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje z' paralelo al eje z que pasa por el centro de gravedad G es, por definición:

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_M (x'^2 + y'^2) dm = \int_M [(x + x_G)^2 + (y + y_G)^2 + (z + z_G)^2] dm = \\ &= \int_M (x^2 + y^2) dm + x_G^2 \int_M dm + 2x_G \int_M x dm + y_G^2 \int_M dm + 2y_G \int_M y dm \end{aligned} \quad (62)$$

Sin embargo:

$$I_{zG} = \int_M (x^2 + y^2) dm \quad (63)$$

Donde el subíndice G indica que el eje z pasa por el centro de gravedad G del cuerpo.

Como los ejes xyz pasan por el centro de gravedad G las siguientes integrales son nulas:

$$\int_M x dm = 0 \quad \int_M y dm = 0 \quad (64)$$

de donde queda:

$$I_{z'} = I_{zG} + M d_z^2 \quad (65)$$

Siendo d_z :

$$d_z = \sqrt{x_G^2 + y_G^2} \quad (66)$$

6. Productos de inercia

En el análisis de la dinámica del sólido rígido aparecen, a veces, expresiones que contienen el producto de un pequeño elemento de masa por las distancias a **dos planos ortogonales**. Este producto se denomina **producto de inercia** del elemento. Para el caso del producto de inercia del elemento de la Figura 16 respecto a los planos xz e yz es, por definición:

$$dI_{xy} = xy dm \quad (67)$$

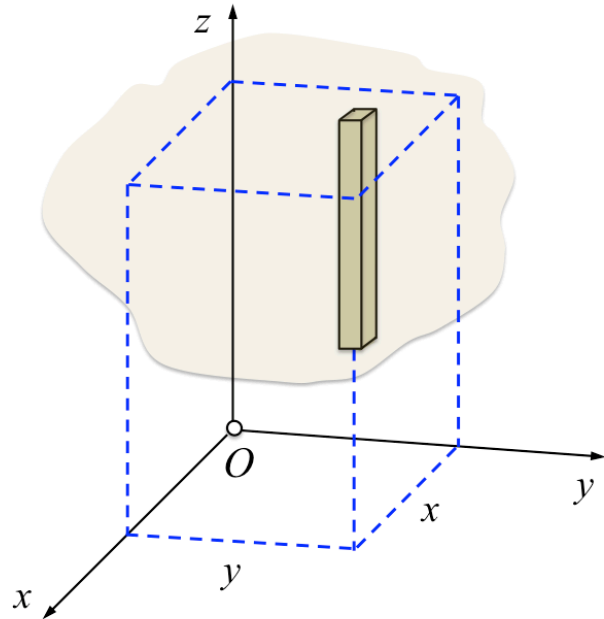


Figura 16

Los tres productos de inercia se calculan mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_M xy \, dm \\ I_{yz} &= \int_M yz \, dm \\ I_{xz} &= \int_M xz \, dm \end{aligned} \quad (68)$$

Se cumple:

$$I_{xy} = I_{yx} \quad I_{yz} = I_{zy} \quad I_{xz} = I_{zx} \quad (69)$$

El producto de inercia puede ser positivo, negativo o nulo, ya que las dos distancias coordenadas tienen signos independientes. El producto de inercia será positivo cuando las coordenadas sean del mismo signo y negativo cuando sean de signo contrario. El producto de inercia será **nulo** cuando uno de los dos planos respecto a los cuales se calcula sea un plano de simetría, ya que los elementos a uno y otro lado de éste se podrán emparejar de manera que sus productos de inercia respectivos sean uno positivo y otro negativo, siendo nula su suma.

Si alguno o ambos planos ortogonales respecto a los cuales se calcula el producto de inercia son planos de simetría para la masa, el producto de inercia respecto a estos planos será nulo.

Fijémonos en la Figura 17. En el caso (a), el plano yz es un plano de simetría y entonces $I_{xy} = I_{xz} = 0$, mientras que $I_{yz} > 0$. En el caso (b) los planos xz e yz son planos de simetría y, por tanto, $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$.

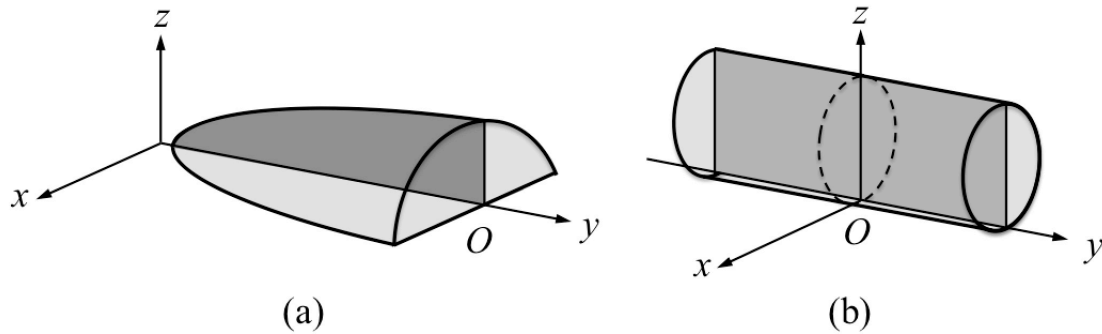


Figura 17

También existe un **teorema de Steiner para los momentos de inercia**. Si (x_G, y_G, z_G) son las coordenadas del centro de gravedad G medidas en el sistema $x'y'z'$, se cumple:

$$\begin{aligned} x' &= x + x_G \\ y' &= y + y_G \\ z' &= z + z_G \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
I_{x'y'} &= I_{xyG} + M x_G y_G \\
I_{y'z'} &= I_{yzG} + M y_G z_G \\
I_{x'z'} &= I_{xzG} + M x_G z_G
\end{aligned}
\tag{71}$$

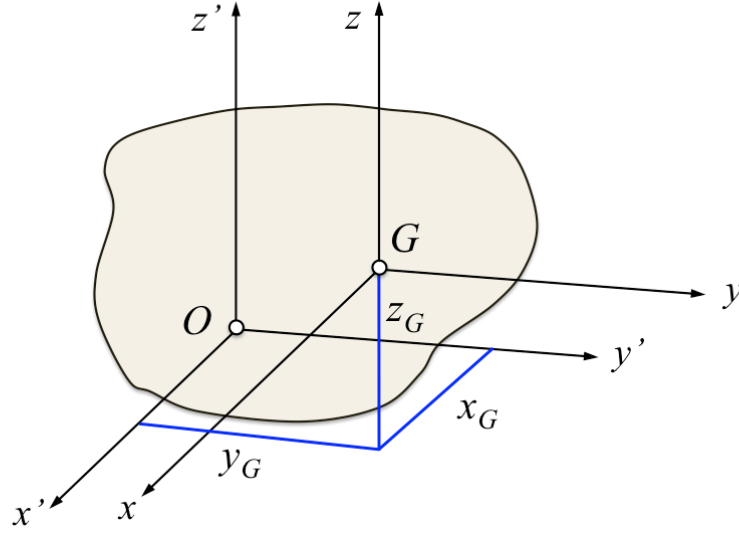


Figura 18

El producto de inercia $I_{x'y'}$ del cuerpo respecto al par de planos $x'z'$ y $y'z'$ es, por definición:

$$\begin{aligned}
I_{x'y'} &= \int_M x' y' dm = \int_M (x + x_G)(y + y_G) dm = \\
&= \int_M x_G y_G dm + \int_M x_G y dm + \int_M y_G x dm + \int_M x y dm
\end{aligned}
\tag{72}$$

Como x_G e y_G son las mismas para todo el elemento de masa dm , se pueden sacar fuera de las integrales y queda:

$$I_{x'y'} = x_G y_G \int_M dm + x_G \int_M y dm + y_G \int_M x dm + \int_M x y dm
\tag{73}$$

Sin embargo:

$$I_{xyG} = \int_M x y dm
\tag{74}$$

Donde el subíndice G indica que los ejes x e y pasan por el centro de gravedad G del cuerpo.

Como los ejes xyz pasan por el centro de gravedad G las siguientes integrales son nulas:

$$\int_M x dm = 0 \quad \int_M y dm = 0
\tag{75}$$

de donde queda:

$$I_{x'y'} = I_{xyG} + M x_G y_G \quad (76)$$

Momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario E que pasa por O

Sea $\hat{\mathbf{u}}$ el vector unitario en la dirección del eje E :

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos \alpha \vec{\mathbf{i}} + \cos \beta \vec{\mathbf{j}} + \cos \gamma \vec{\mathbf{k}} \quad (77)$$

donde los cosenos directores del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ son:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{array} \right\} \quad (78)$$

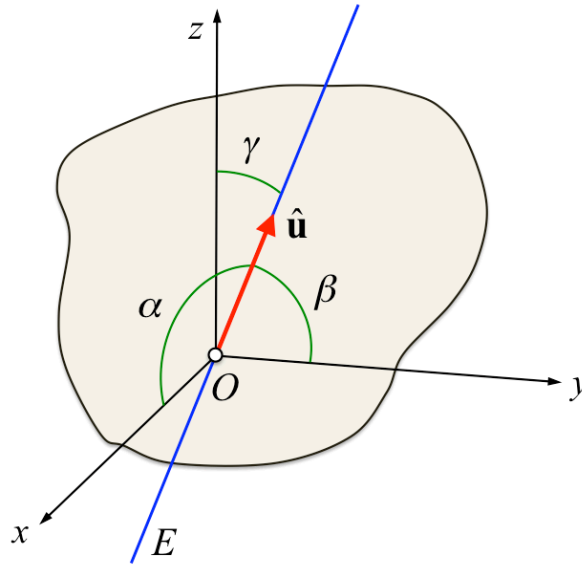


Figura 19

Datos: Momentos y productos de inercia en el sistema xyz (I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{yz} , I_{xz}).

El momento de inercia respecto al eje E se calcula mediante la expresión:

$$I_E = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma \quad (79)$$

Una expresión equivalente se obtiene escribiendo el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección del eje E en la forma:

$$\hat{\mathbf{u}} = u_x \vec{\mathbf{i}} + u_y \vec{\mathbf{j}} + u_z \vec{\mathbf{k}} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x \equiv \cos \alpha \\ u_y \equiv \cos \beta \\ u_z \equiv \cos \gamma \end{array} \right. \quad (80)$$

de donde:

$$I_E = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{xz}u_xu_z \quad (81)$$

Que también se puede escribir en la siguiente forma:

$$I_E = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (82)$$

[Utilizamos I_x e I_{xx} indistintamente (y lo mismo para $I_y \equiv I_{yy}$ e $I_z \equiv I_{zz}$)].

La demostración es sencilla. La distancia de dm al eje E es (Figura 20):

$$d = r \sin \theta = |\vec{u} \times \vec{r}| \quad (83)$$

Vector unitario del eje:

$$\hat{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (84)$$

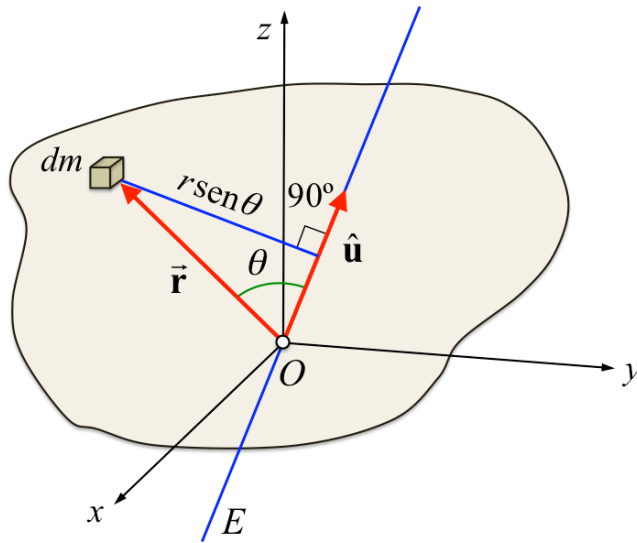


Figura 20

Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} I_E &= \int_M d^2 dm = \int_M (r \sin \theta)^2 dm = \int_M |\vec{u} \times \vec{r}|^2 dm = \int_M (\vec{u} \times \vec{r}) \cdot (\vec{u} \times \vec{r}) dm = \\ &= \int_M [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2] dm = \\ &= u_x^2 \int_M (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int_M (x^2 + z^2) dm + u_z^2 \int_M (x^2 + y^2) dm - \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}
& -2u_x u_y \int_M xy \, dm - 2u_y u_z \int_M yz \, dm - 2u_x u_z \int_M xz \, dm = \\
& = I_{xx} u_x^2 + I_{yy} u_y^2 + I_{zz} u_z^2 - 2I_{xy} u_x u_y - 2I_{yz} u_y u_z - 2I_{xz} u_x u_z
\end{aligned}$$

7. Momentos principales de inercia

Tensor de inercia

Las propiedades inerciales de un cuerpo están caracterizadas por nueve términos, **seis de los cuales son independientes unos de otros** (I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{yz} , I_{xz}). Este conjunto de términos puede escribirse en la forma de la matriz de la ecuación (82):

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (86)$$

que se denomina **tensor de inercia**. Tiene un conjunto único de valores para un cuerpo cuando se determina para cada ubicación del origen O y orientación de los ejes de coordenadas.

Ejes principales de inercia

En general, para el punto O podemos especificar una orientación de los ejes coordenados, que es única, para la cual todos los productos de inercia son nulos cuando se calculan respecto a estos ejes. Al hacerlo así, se dice que el tensor de inercia está **diagonalizado** y puede escribirse en la forma simplificada ($I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$):

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (87)$$

[Recordemos que $I_x \equiv I_{xx}$, $I_y \equiv I_{yy}$, $I_z \equiv I_{zz}$].

En este caso los momentos de inercia I_x , I_y , I_z son los denominados **momentos principales de inercia**, los cuales se calculan respecto a los **ejes principales de inercia**. De estos tres momentos principales de inercia, uno será **máximo** y otro un **mínimo** del momento de inercia del cuerpo.

Para encontrar los ejes y momentos principales de inercia hay que **diagonalizar el tensor de inercia**. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales los ejes principales de inercia de determinan por **inspección**. Si los ejes de coordenadas están orientados de modo que dos de los tres planos ortogonales que los contienen son planos de simetría del cuerpo, entonces todos los productos de inercia del cuerpo son nulos con respecto a estos planos de coordenadas y, por consiguiente, estos ejes de coordenadas son ejes principales de inercia.

Si xyz con origen en O son **ejes principales de inercia**, entonces el **momento de inercia respecto a un eje E que pasa por O** se calcula mediante:

$$I_E = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (88)$$

puesto que $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$ para los ejes principales de inercia.

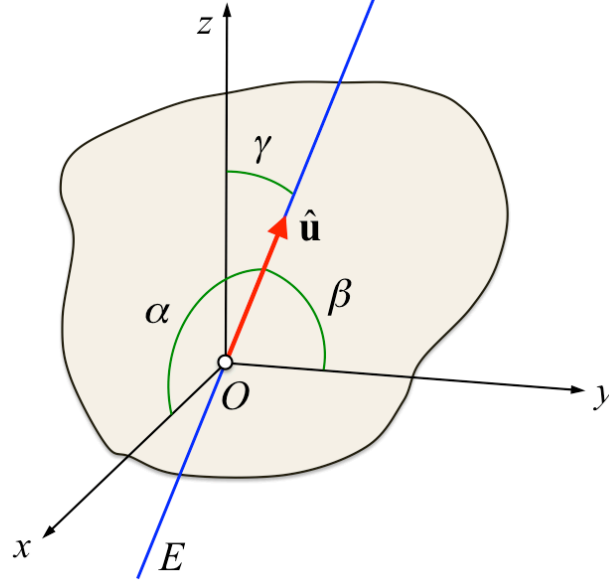


Figura 21

Siendo $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ los cosenos directores del vector de la recta E :

$$\hat{\mathbf{u}} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x \equiv \cos \alpha \\ u_y \equiv \cos \beta \\ u_z \equiv \cos \gamma \end{array} \right. \quad (89)$$

La ecuación (88) también se puede escribir:

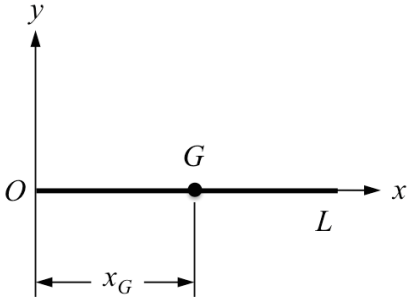
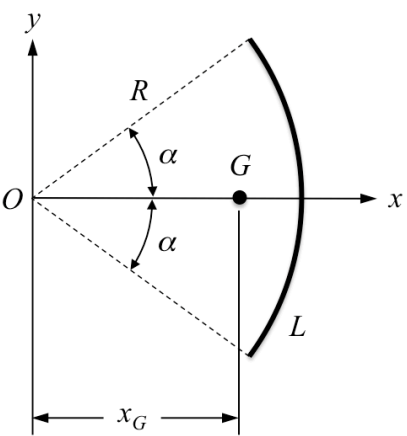
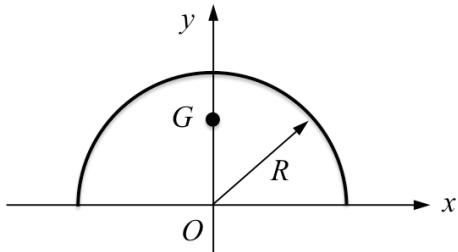
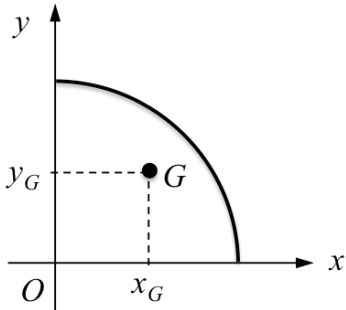
$$I_E = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 \quad (90)$$

Finalmente, utilizando el tensor de inercia diagonalizado se puede escribir:

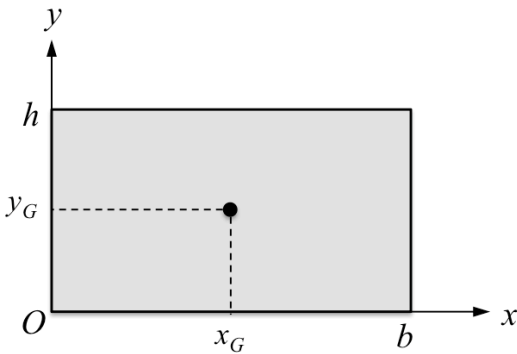
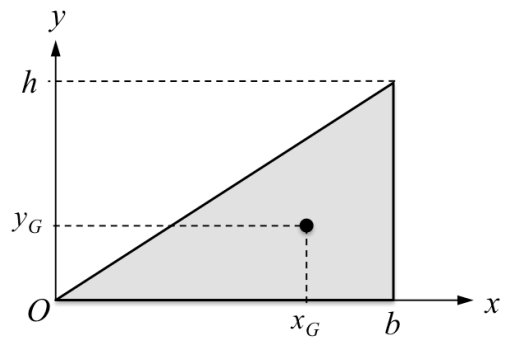
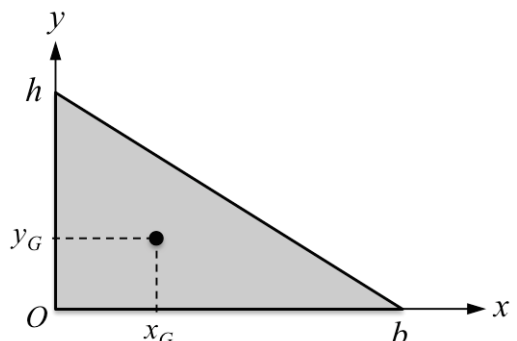
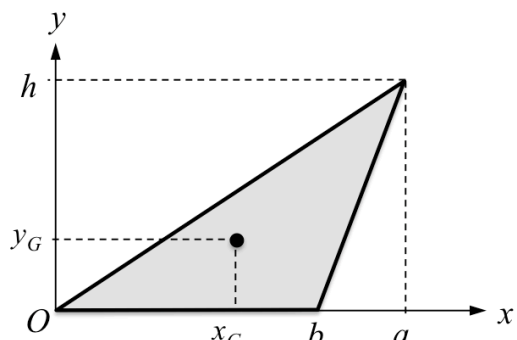
$$I_E = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (91)$$

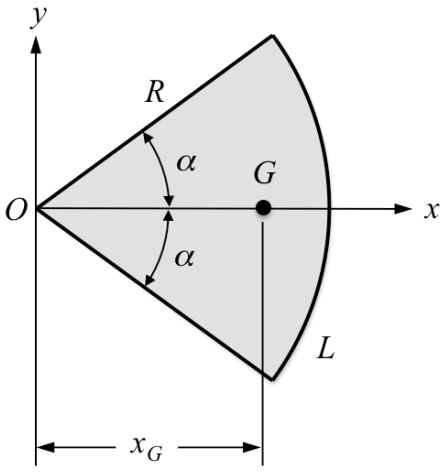
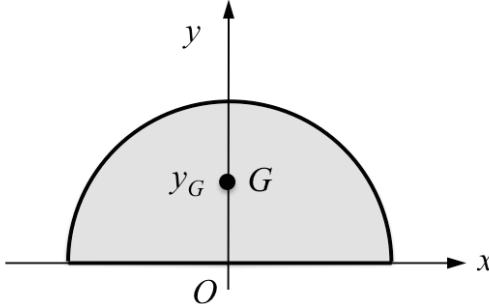
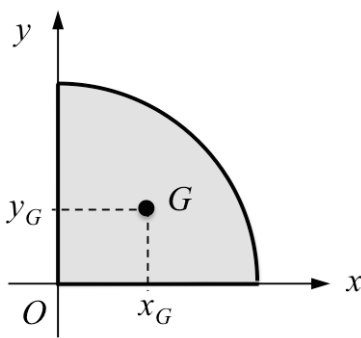
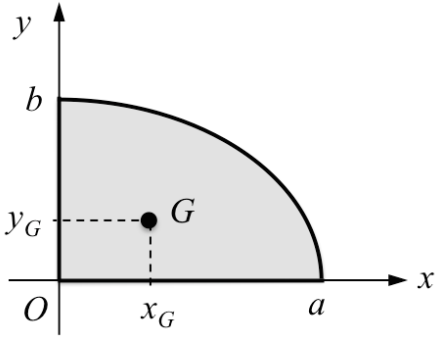
CENTROS DE GRAVEDAD DE FIGURAS GEOMÉTRICAS SIMPLES

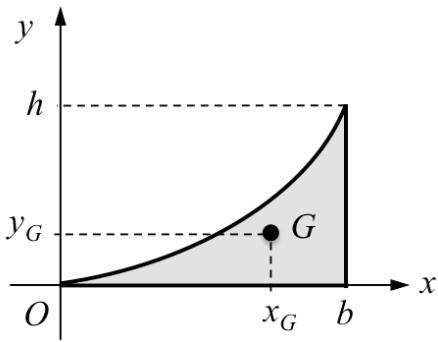
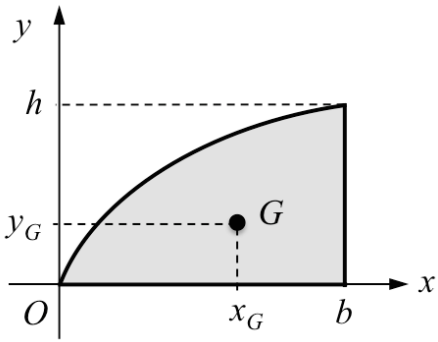
Elementos con densidad lineal de masa λ uniforme

	<p>Varilla delgada de longitud L</p> $x_G = \frac{1}{2}L$ $y_G = 0$
	<p>Arco circular de longitud L y radio R</p> $L = 2R\alpha$ $x_G = \frac{R}{\alpha} \sin \alpha = \frac{2R^2}{L} \sin \left(\frac{L}{2R} \right)$ $y_G = 0$
	<p>Semicircunferencia de radio R</p> $L = \pi R$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{2R}{\pi}$
	<p>Cuadrante de radio R</p> $L = \frac{1}{2}\pi R$ $x_G = \frac{2R}{\pi}$ $y_G = \frac{2R}{\pi}$

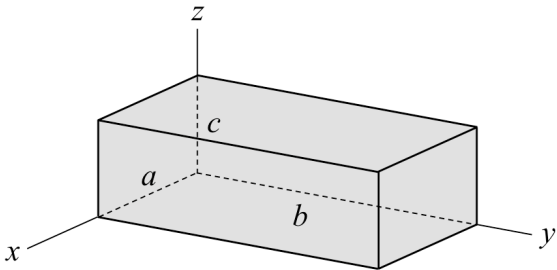
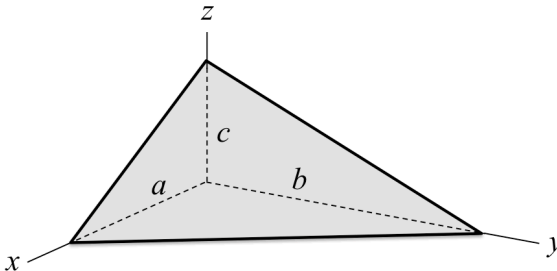
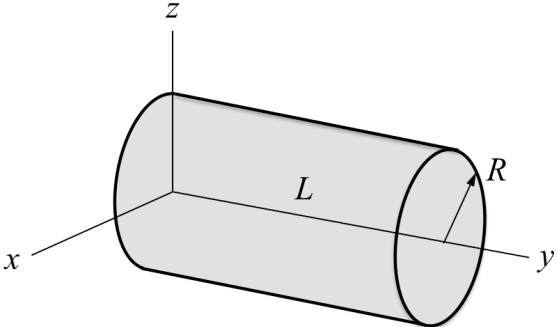
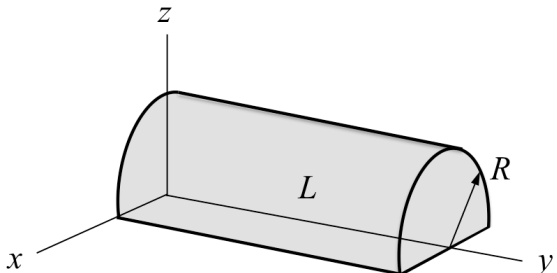
Elementos con densidad superficial de masa σ uniforme

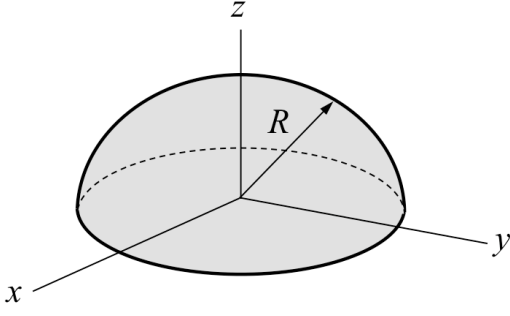
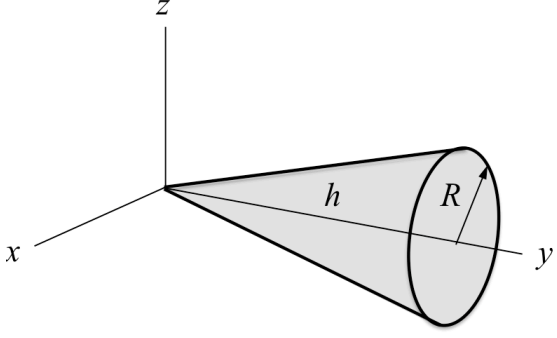
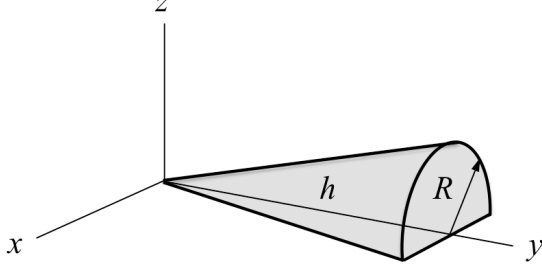
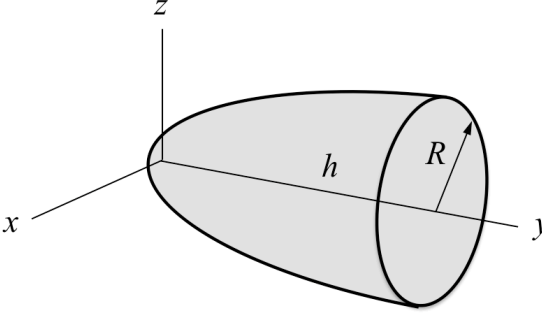
	<p>Rectángulo</p> $S = bh$ $x_G = \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$
	<p>Triángulo rectángulo</p> $S = \frac{1}{2}bh$ $x_G = \frac{2}{3}b$ $y_G = \frac{1}{3}h$
	<p>Triángulo rectángulo</p> $S = \frac{1}{2}bh$ $x_G = \frac{1}{3}b$ $y_G = \frac{1}{3}h$
	<p>Triángulo</p> $L = \frac{1}{2}bh$ $x_G = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_G = \frac{1}{3}h$

	<p>Sector circular de radio R</p> $S = R^2 \alpha$ $x_G = \frac{2R}{3\alpha} \operatorname{sen} \alpha = \frac{2R^3}{3S} \operatorname{sen} \left(\frac{S}{R^2} \right)$ $y_G = 0$
	<p>Semidisco de radio R</p> $S = \frac{1}{2} \pi R^2$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{4R}{3\pi}$
	<p>Cuadrante de radio R</p> $S = \frac{1}{4} \pi R^2$ $x_G = \frac{4R}{3\pi}$ $y_G = \frac{4R}{3\pi}$
	<p>Cuadrante de elipse</p> $S = \frac{1}{4} \pi ab$ $x_G = \frac{4a}{3\pi}$ $y_G = \frac{4b}{3\pi}$

	<p>Enjuta parabólica</p> $S = \frac{1}{3}bh$ $x_G = \frac{3}{4}b$ $y_G = \frac{3}{10}h$
	<p>Cuadrante de parábola</p> $S = \frac{2}{3}bh$ $x_G = \frac{5}{8}b$ $y_G = \frac{2}{5}h$

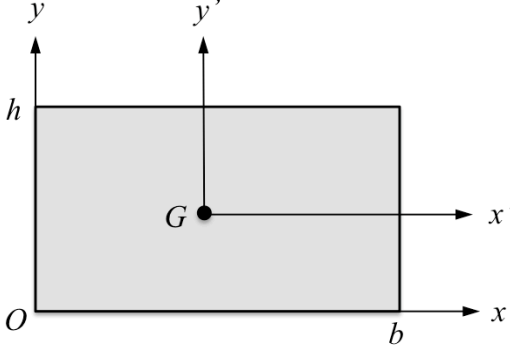
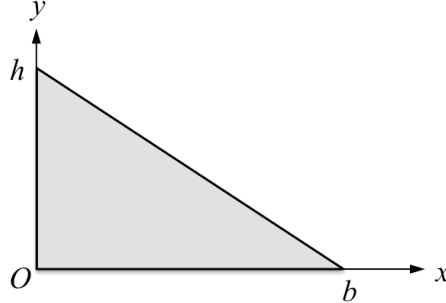
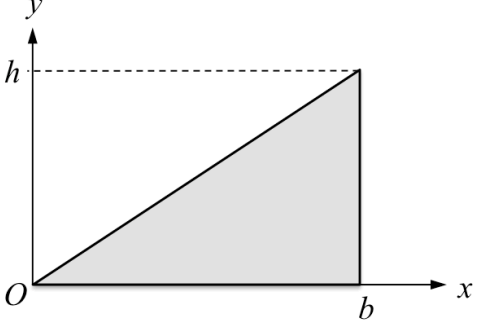
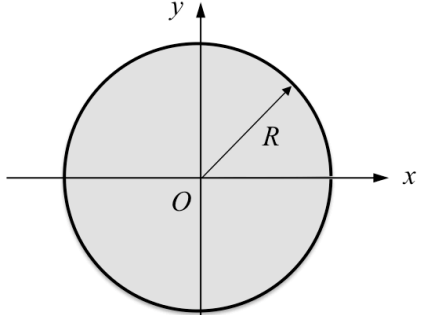
Elementos con densidad volumétrica de masa ρ uniforme

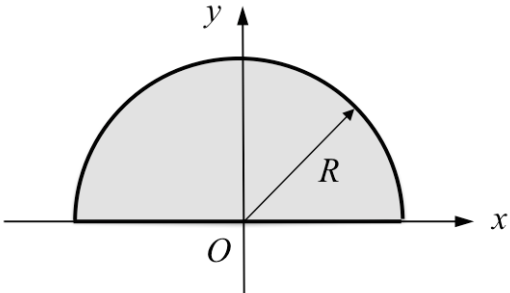
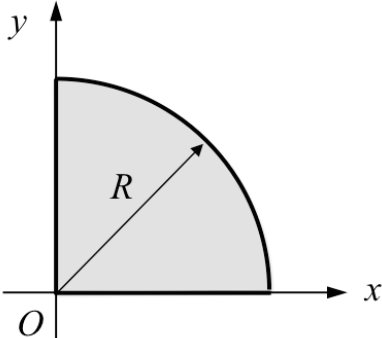
	<p>Paralelepípedo rectangular</p> $V = abc$ $x_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{b}{2}$ $z_G = \frac{c}{2}$
	<p>Tetraedro regular</p> $V = \frac{1}{6}abc$ $x_G = \frac{a}{4}$ $y_G = \frac{b}{4}$ $z_G = \frac{c}{4}$
	<p>Cilindro de revolución</p> $V = \pi R^2 L$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{L}{2}$ $z_G = 0$
	<p>Semicilindro</p> $V = \frac{\pi R^2 L}{2}$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{L}{2}$ $z_G = \frac{4R}{3\pi}$

	<p>Semiesfera</p> $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ $x_G = 0$ $y_G = 0$ $z_G = \frac{3}{8}R$
	<p>Cono de revolución</p> $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{3}{4}h$ $z_G = 0$
	<p>Semicono</p> $V = \frac{1}{6}\pi R^2 h$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{3}{4}h$ $z_G = \frac{R}{\pi}$
	<p>Paraboloide</p> $V = \frac{1}{2}\pi R^2 h$ $x_G = 0$ $y_G = \frac{2}{3}h$ $z_G = 0$

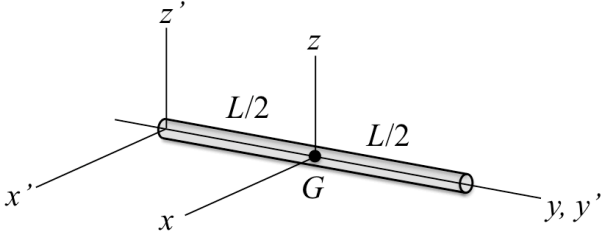
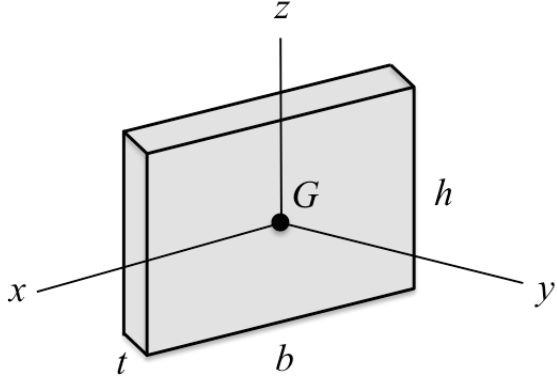
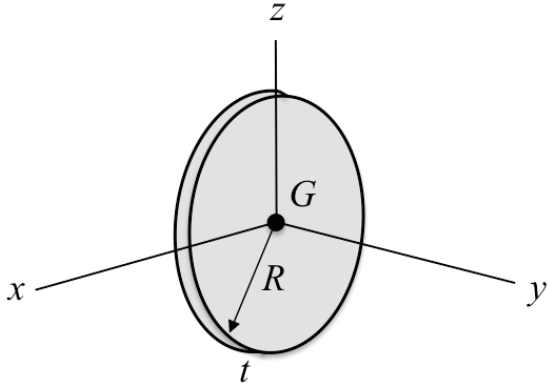
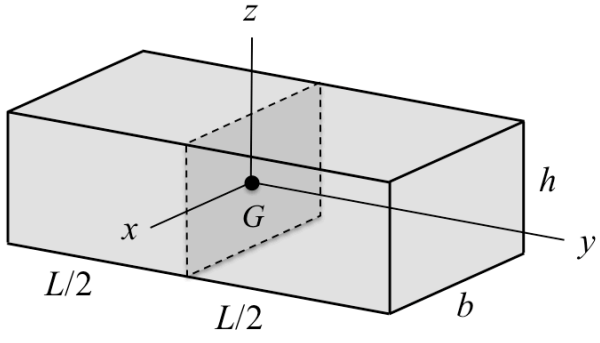
MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS SIMPLES

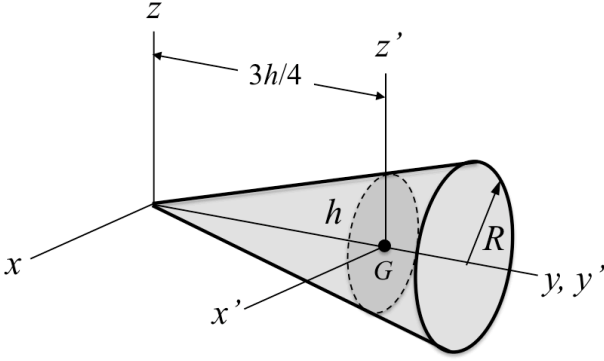
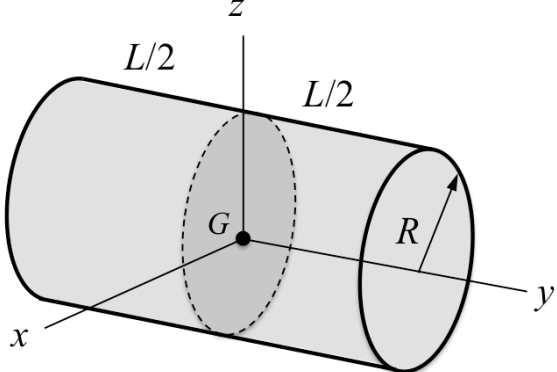
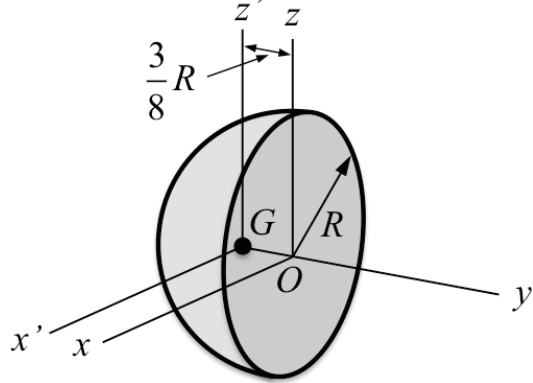
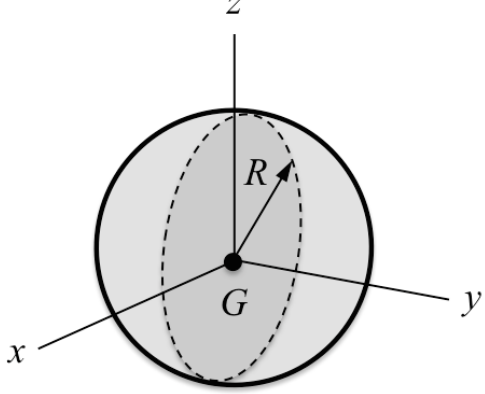
Elementos con densidad superficial de masa σ uniforme

	<p>Rectángulo</p> $I_x = \frac{1}{3} \sigma b h^3 = \frac{1}{3} M h^2 \quad I_y = \frac{1}{3} \sigma h b^3 = \frac{1}{3} M b^2$ $I_{xG} = \frac{1}{12} \sigma b h^3 = \frac{1}{12} M h^2$ $I_{yG} = \frac{1}{12} \sigma h b^3 = \frac{1}{12} M b^2$ $I_{xy} = \frac{1}{4} \sigma b^2 h^2 = \frac{1}{4} M b h \quad I_{xyG} = 0$
	<p>Triángulo rectángulo</p> $M = \frac{1}{2} \sigma b h$ $I_x = \frac{1}{12} \sigma b h^3 = \frac{1}{6} M h^2 \quad I_y = \frac{1}{12} \sigma h b^3 = \frac{1}{6} M b^2$ $I_{xy} = \frac{1}{12} \sigma b^2 h^2 = \frac{1}{6} M b h$
	<p>Triángulo rectángulo</p> $M = \frac{1}{2} \sigma b h$ $I_x = \frac{1}{12} \sigma b h^3 = \frac{1}{6} M h^2 \quad I_y = \frac{1}{4} \sigma h b^3 = \frac{1}{2} M b^2$ $I_{xy} = \frac{1}{8} \sigma b^2 h^2 = \frac{1}{4} M b h$
	<p>Círculo</p> $M = \sigma \pi R^2$ $I_O = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{2} M R^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_O = \frac{1}{4} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{4} M R^2$

	<p>Semicírculo</p> $M = \frac{1}{2} \sigma \pi R^2$ $I_O = \frac{1}{4} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{2} MR^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_O = \frac{1}{8} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{4} MR^2$
	<p>Cuadrante circular</p> $M = \frac{1}{4} \sigma \pi R^2$ $I_O = \frac{1}{8} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{2} MR^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_O = \frac{1}{16} \sigma \pi R^4 = \frac{1}{4} MR^2$

Volúmenes

	<p>Varilla</p> $I_{yG} = 0 \quad I_{xG} = I_{zG} = \frac{1}{12} M L^2$ $I_{y'} = 0 \quad I_{x'} = I_{z'} = \frac{1}{3} M L^2$
	<p>Placa rectangular</p> $I_{xG} = \frac{1}{12} M h^2$ $I_{yG} = \frac{1}{12} M (b^2 + h^2)$ $I_{zG} = \frac{1}{12} M b^2$ $I_{xyG} = I_{yzG} = I_{xzG} = 0$
	<p>Placa circular</p> $I_{yG} = \frac{1}{2} M R^2$ $I_{xG} = I_{zG} = \frac{1}{4} M R^2$
	<p>Prisma rectangular</p> $I_{xG} = \frac{1}{12} M (h^2 + L^2)$ $I_{yG} = \frac{1}{12} M (b^2 + h^2)$ $I_{zG} = \frac{1}{12} M (b^2 + L^2)$

	<p>Cono de revolución</p> $x_G = 0 \quad y_G = \frac{3}{4}h \quad z_G = 0$ $I_x = I_z = \frac{3}{20}M(R^2 + 4h^2) \quad I_y = \frac{3}{10}MR^2$ $I_{xG} = I_{zG} = \frac{3}{80}M(4R^2 + h^2) \quad I_{yG} = \frac{3}{10}MR^2$
	<p>Cilindro de revolución</p> $I_{xG} = I_{zG} = \frac{1}{12}M(3R^2 + L^2)$ $I_{yG} = \frac{1}{2}MR^2$
	<p>Semiesfera</p> $x_G = 0 \quad y_G = -\frac{3}{8}R \quad z_G = 0$ $I_{xG} = I_{zG} = \frac{83}{320}MR^2 \quad I_{yG} = \frac{2}{5}MR^2$
	<p>Esfera</p> $I_{xG} = I_{yG} = I_{zG} = \frac{2}{5}MR^2$

BIBLIOGRAFÍA

W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería Mecánica: Estática* (Reverté, 1996).

W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Reverté, 1996).

R. C. Hibbeler, *Ingeniería Mecánica: Estática* (Prentice Hall, 2010).

R. C. Hibbeler, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Prentice Hall, 2010).

F. Belmar, A. Garmendia y J. Llinares, *Curso de Física Aplicada: Estática* (Universidad Politécnica de Valencia, 1998)